Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 17.02.2014.

Pismeni ispit iz Inžinjerske matematike III

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 3y + 4 \\ \dot{y} &= 2x - 2y - 1 \end{aligned}$$

2. Primjenom Laplasove transformacije rješiti diferencijalnu jednačinu

$$ty'' - (4t+1)y' + 2(2t+1)y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

3. Na skladištu je 1000 proizvoda i to: 750 proizvoda iz prve i 250 proizvoda iz druge fabrike. Među proizvodima prve fabrike je 5% defektnih a iz druge je 3% defektnih. Kolika je vjerovatnoća da slučajno uzet proizvod iz skladišta bude defektan? Ako je na slučaj uzeti proizvod defektan, kolika je vjerovatnoća da je proizveden u prvoj a kolika da je proizveden u drugoj fabrici?

4. Za sljedeće podatke je poznato da su dobijeni iz normalne populacije

$$15,6; \quad 16,4; \quad 14,8; \quad 17,2; \quad 16,9; \quad 15,3; \quad 14,0; \quad 15,9$$

(60%) (a) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon podataka te predstaviti podatke grafički pomoću histograma frekvencija (naštimati histograma frekvencija tako da ima 3 intervala). Odrediti i sredinu, medijanu i mod uzorka.

(40%) (b) Pretpostavimo da dati podaci imaju standardnu devijaciju 2. Iskoristiti ih i testirati hipotezu da je sredina populacije jednaka 15. Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

(#) Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 3x - 3y + 4$$
$$\dot{y} = 2x - 2y - 1$$

Rj.

Rješenje sistema će biti f-je $x = x(t)$ i $y = y(t)$.
Prvo odredimo opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema

$$3x - \dot{x} - 3y = 0$$
$$2x - 2y - \dot{y} = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\dot{x} = \lambda A e^{\lambda x}$$
$$\dot{y} = B \lambda e^{\lambda x}$$
$$\Uparrow$$

Rješenja homogenog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda x}$, $y = Be^{\lambda x}$
pa ako to uvrstimo u (1) imamo,

$$3Ae^{\lambda x} - A\lambda e^{\lambda x} - 3Be^{\lambda x} = 0 \qquad /: e^{\lambda x}$$
$$2Ae^{\lambda x} - 2Be^{\lambda x} - B\lambda e^{\lambda x} = 0 \qquad /: e^{\lambda x}$$

$$(3-\lambda)A - 3B = 0$$
$$2A + (-2-\lambda)B = 0$$

Odredimo koeficijente A i B. Determinanta zadnjeg sistema je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 6 = -6 \underline{-3\lambda} \underline{+2\lambda} + \lambda^2 + 6 =$$
$$= \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

Karakteristična jednačina $\lambda(\lambda-1) = 0$ ima korijene $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$.

a) Za $\lambda_1=0$ imamo
$$\begin{aligned} 3A-3B&=0\\ 2A-2B&=0\\ \hline A&=B \end{aligned}$$
sistem ima ∞ mnogo rješenja, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

za $B=1 \Rightarrow A=1$

$$x_1(t)=1e^{0t}=1$$
$$y_1(t)=1\cdot e^{0t}=1$$

b) Za $\lambda_2=1$ imamo
$$\begin{aligned} 2A-3B&=0\\ 2A-3B&=0\\ \hline B&=\frac{2}{3}A \end{aligned}$$
sistem ima ∞ mnogo rješenja, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

za $A=3 \Rightarrow B=2 \Rightarrow$
$$x_2(t)=3e^t$$
$$y_2(t)=2e^t$$

Opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema je
$$x(t)=C_1+3C_2e^t$$
$$y(t)=C_1+2C_2e^t$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opšte rješenje datog nehomogenog sistema u obliku
$$x(t)=C_1(t)+3C_2(t)e^t$$
$$y(t)=C_1(t)+2C_2(t)e^t$$

pri čemu izvode C_1', C_2' f-ja $C_1(t)$ i $C_2(t)$ određujemo iz sistema
$$C_1'+3C_2'e^t=4$$
$$C_1'+2C_2'e^t=-1$$

Nepoznate su C_1' i C_2' i ovaj sistem možemo riješiti Kronecker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3e^t & 4 \\ 1 & 2e^t & -1 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3e^t & 4 \\ 0 & -e^t & -5 \end{array}\right] \overset{I_v + II_v\cdot 3}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & -e^t & -5 \end{array}\right] \overset{II_v\cdot(-e^{-t})}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 5e^{-t} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_1' = -11, \quad C_2' = 5e^{-t}$$

Integracijom zadnjih jednačina dobijamo

$$C_1(t) = -11t + D_1$$

$$C_2(t) = -5e^{-t} + D_2$$

Kako je

$$C_1(t) + 3C_2(t)e^t = -11t + \underset{\sim}{D_1} - 15 + \underset{\approx}{3D_2}e^t = D_1 + 3D_2e^t - 11t - 15$$

i $\quad C_1(t) + 2C_2(t)e^t = -11t + D_1 + (-10) + 2D_2e^t = D_1 + 2D_2e^t - 11t - 10$

to je opšte rješenje datog sistema

$$x(t) = D_1 + 3D_2e^t - 11t - 15$$

$$y(t) = D_1 + 2D_2e^t - 11t - 10$$

(#) Primjenom Laplasove transformacije riješiti diferencijalnu jednačinu

$$ty'' - (4t+1)y' + 2(2t+1)y = 0; \quad y(0)=0; \quad y'(0)=0.$$

Rj. Znamo da

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY(s) - y(0) \quad i \quad \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

gdje je $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$. U našem slučaju

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) \quad i \quad \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2Y(s) \qquad \dots (1)$$

Prema osobini Laplasovih transformacija znamo da je

$$\underline{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)}, \quad \text{gdje } F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s).$$

pa imamo (na osnovu (1))

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s) = (-1)\frac{d}{ds}(s^2Y(s)) = (-1)\left(2sY(s) + s^2Y'(s)\right) =$$
$$= -2sY(s) - s^2Y'(s) \qquad \dots (2)$$

$$\mathcal{L}\{(4t+1)y'\}(s) = 4\mathcal{L}\{ty'\}(s) + \mathcal{L}\{y'\}(s) = 4(-1)\underbrace{\frac{d}{ds}(sY(s))}_{Y(s)+sY'(s)} +$$
$$+ sY(s) = -4Y(s) - 4sY'(s) + sY(s) \qquad \dots (3)$$

$$\mathcal{L}\{2(2t+1)y\}(s) = 4\mathcal{L}\{ty\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) =$$
$$= -4Y'(s) + 2Y(s) \qquad \dots (4)$$

Prema tome

$$ty'' - (4t+1)y' + 2(2t+1)y = 0 \quad /\mathcal{L}$$

pa na osnovu (2), (3) i (4) imamo

$$\underline{\underline{-2sY(s)}}\ \underline{-s^2Y'(s)}+4Y(s)\ \underline{+4sY'(s)}\ \underline{\underline{-sY(s)}}\ \underline{-4Y'(s)}+2Y(s)=0$$

$$(-s^2+4s-4)Y'(s)-3sY(s)+6Y(s)=0 \quad /\cdot(-1)$$

$$(s-2)^2Y'(s)+3(s-2)Y(s)=0 \quad /:(s-2)^2$$

$$Y'(s)+\frac{3}{s-2}Y(s)=0$$

ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)}=\frac{-3}{s-2} \quad \int$$

$$\ln Y(s)=(-3)\ln(s-2)+\ln C_1$$

$$Y(s)=\frac{C_1}{(s-2)^3}$$

Prema tabeli Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}\{t^2e^{+2t}\}(s)=\frac{2!}{(s-2)^3}=\frac{2}{(s-2)^3}$$

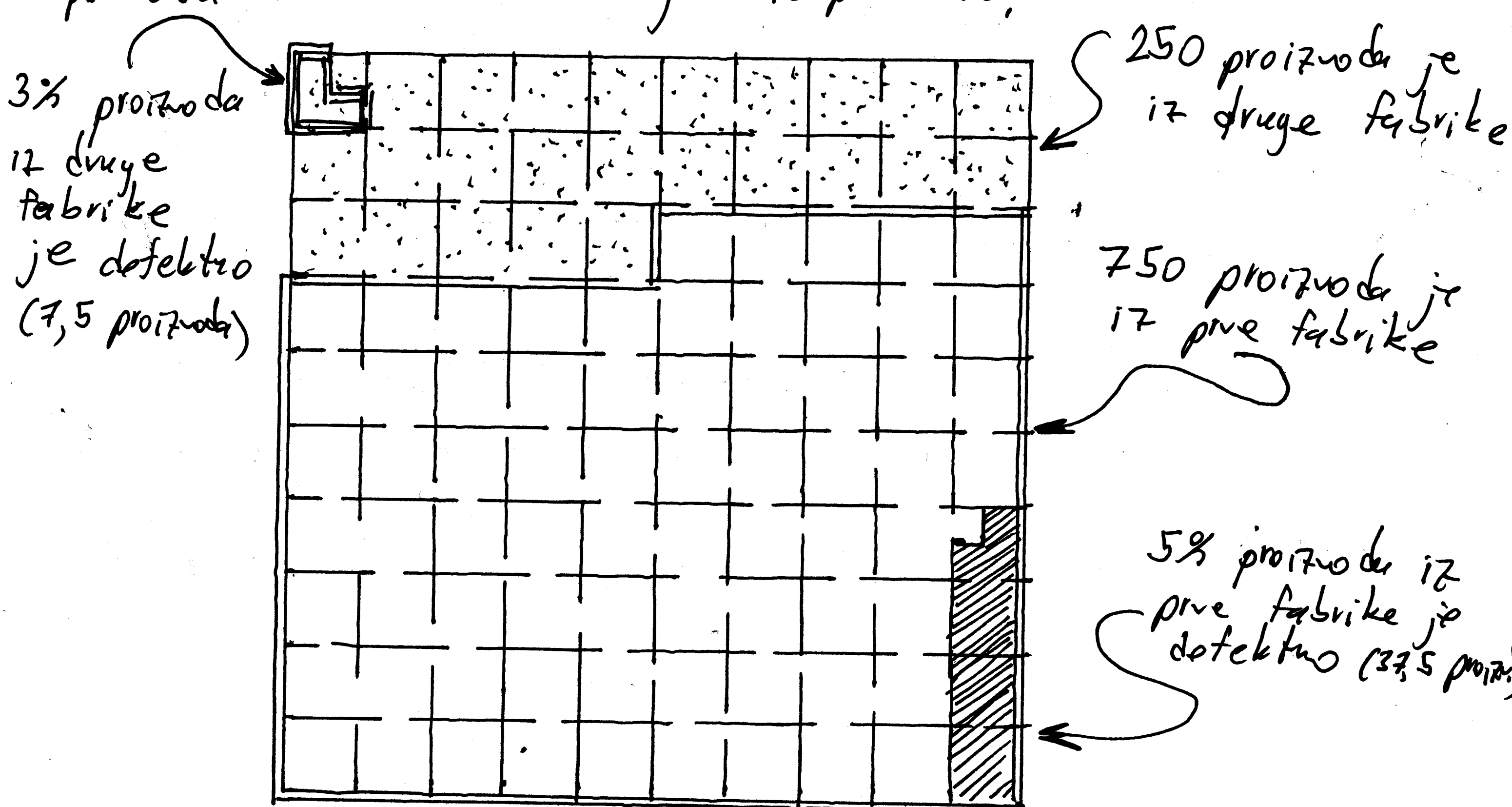
Prema tome

$$y(t)=Ct^2e^{2t},\quad C\neq 0$$

traženo rješenje

(#) Na skladištu je 1000 proizvoda i to: 750 proizvoda iz prve i 250 proizvoda iz druge fabrike. Među proizvodima prve fabrike je 5% defektnih a iz druge je 3% defektnih. Kolika je vjerovatnoća da slučajno uzet proizvod iz skladišta bude defektan? Ako je na slučaj uzeti proizvod defektan, kolika je vjerovatnoća da je proizveden u prvoj a kolika da je proizveden u drugoj fabrici?

Rj. Sve proizvode iz fabrike predstavimo geometrijski pomoću kvadrata dimenzija 10 puta 10.



Od 1000 proizvoda 45 je defektno.

Neka je D događaj: "da je na slučaj uzeti proizvod iz skladišta defektan". Tada $P(D) = \frac{45}{1000} = 0,045$.

Neka je A događaj: "da je na slučaj uzeti proizvod iz skladišta proizveden u prvoj fabrici", a B događaj:

"da je na slučaj uzeti proizvod iz skladišta proizveden u drugoj fabrici."

U drugom djelu zadatka trebamo odrediti $P(A|D)$ i $P(B|D)$

$$P(A)=\frac{m(A)}{n}=\frac{750}{1000}=0,75$$

$$P(B)=\frac{m(B)}{n}=\frac{250}{1000}=0,25$$

Prema Bajesovim formulama je

$$P(A|D)=\frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)}=\frac{0,75\cdot 0,05}{0,045}=0,83333\dots$$

$$P(B|D)=\frac{P(B)\cdot P(D|B)}{P(D)}=\frac{0,25\cdot 0,03}{0,045}=0,166666\dots$$

Dakle, ako je na slučaj izvučen defektan proizvod, vjerovatnoća da je proizveden u prvoj fabrici je

$$P(A|D)=0,83$$

a u drugoj

$$P(B|D)=0,17$$

(#) Za sljedeće podatke je poznato da su dobijeni iz normalne populacije

15,6; 16,4; 14,8; 17,2; 16,9; 15,3; 14,0; 15,9

(a) Naći standardnu devijaciju, raspon i interkvartilni raspon te predstaviti podatke grafički pomoću histograma frekvencija (naštimati histogram tako da ima tri intervala). Odrediti i sredinu, medijanu i mod uzorka.

(b) Pretpostavimo da dati podaci imaju standardnu devijaciju 2. Iskoristiti ih i testirati hipotezu da je sredina populacije jednaka 15. Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

Rj.

(a) Standardnu devijaciju možemo izračunati po formuli

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1}}$$

Dat je uzorak od 8 vrijednosti.

$$\overline{x} = \frac{15,6+16,4+14,8+17,2+16,9+15,3+14,0+15,9}{8} = 15,7625$$

Sredina uzorka je 15,7625.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 15,6^2 + 16,4^2 + 14,8^2 + \ldots + 15,9^2 = 1995,71$$

$$s^2 = \frac{1995{,}71 - 8 \cdot 15{,}7625^2}{7} = 1{,}15125$$

Standardna devijacija uzorka je $s \approx 1{,}072$.

Raspon uzorka je $R = 17{,}2 - 14 = 3{,}2$

25ti postotak uzorka je ...

$0{,}25 \cdot 8 = 2$ cio broj, treba nam prosjek druge i treće vrijednosti

Poredajmo brojeve po veličini $14;\ 14{,}8;\ 15{,}3;\ 15{,}6;\ 15{,}9;\ 16{,}4;\ 16{,}9;\ 17{,}2$

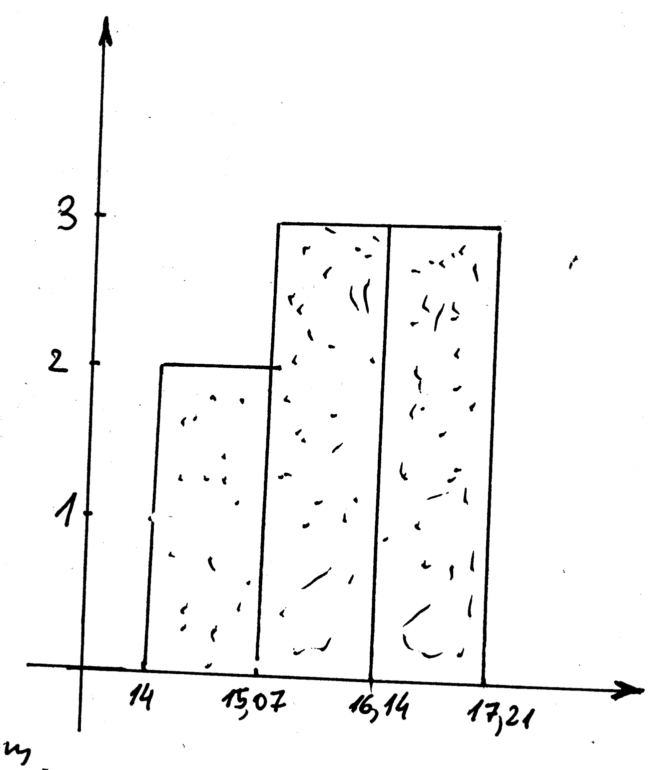
25ti postotak uzorka je 15,05

75ti postotak uzorka je 16,65

Interkvartilni raspon uzorka je 1,06

$3{,}2 : 3 = 1{,}0666 \Rightarrow$ uzmimo interval dužine 1,07

Klasa intervala	Frekvencija
$[14;\ 15{,}07)$	2
$[15{,}07;\ 16{,}14)$	3
$[16{,}14;\ 17{,}21)$	3



Sredina uzorka je već izračunata

$\overline{x} = 15{,}7625$

Medijana uzorka je 15,75.

Mod uzorka su sve vrijednosti tj. ne postoji podatak sa najvećom frekvencijom.

(b) $\sigma = 2$.

$H_0: \mu = 15$

$H_1: \mu \neq 15$

Prosjek od 8 datih vrijednosti je $\bar{X} = 15{,}7625$.
Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{8}}{2}|15{,}7625 - 15| \approx 1{,}0783$$

Kako je

$$P\{|Z| \geq 1{,}0783\} = 2P\{Z \geq 1{,}0783\} =$$

$$= 2(1 - P\{Z \leq 1{,}0783\}) \overset{\text{Prema tabeli}}{=\!=\!=}$$

$$= 2(1 - 0{,}8596) = 0{,}2808$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P\{Z \leq 1{,}07\} = 0{,}8577 \\ &P\{Z \leq 1{,}08\} = 0{,}8599 \end{aligned} \Rightarrow P\{Z \leq 1{,}075\} = 0{,}8588 \\ \Rightarrow P\{Z \leq 1{,}0775\} = 0{,}8594 \Rightarrow P\{Z \leq 1{,}0787\} = 0{,}8597}$$

Tražena p vrijednost je $p = 0{,}281$.
Nulta hipoteza neće biti odbačena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,281. Za bilo koji nivo značajnosti veći ili jednako od 0,281 nulta hipoteza će biti odbačena.